Б.Д. КОШАНОВ, М.Д. КОШАНОВА

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ С ГЕЛЬДЕРОВЫМИ И Lp ГРАНИЧНЫМИ ДАННЫМИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В ЕДИНИЧНОМ ШАРЕ

Аннотация

В этой статье мы рассмотрим класс задач Дирихле с гельдеровыми и L_p граничными данными для полигармонических функций в единичном шаре. В этих случаях получены интегральные представления решения данной задачи.

Кілт сөздер: класс, мақсаттар, функциялар, шар, шешімдер, интеграл.

Ключевые слова: класс, задачи, функции, шар, решения, интеграл.

Keywords: class, tasks, functions, ball, decisions, integral.

1. Введение. В последние годы множество работ были посвящены исследованию различных краевых (граничных) задач для полианалитических, полигармонических, метааналитических и метагармонических функций и т.д. в некоторых плоских областях. К их числу относятся задачи Римана, Гильберта, Дирихле, Неймана, Шварца и Робена [1-5,9]. Основной целью является получение интегральных представлений решения краевых задач в различных постановках (условиях), таких как гельдеровость, непрерывность, соболевские данные на границе и так далее. Все эти работы являются обобщением классической теории интегральных представлений для аналитических и гармонических функций в плоских областях. Среди прочих, задачи Дирихле для полигармонических функций (для краткости, задачи ДПФ) привлекают значительный интерес.

Основной целью данной статьи является решение следующей задачи ДПФ с гельдеровыми и с L_p граничными данными в единичном шаре, т. е.

$$\begin{cases}\Delta^m u = 0 \text{ в } \square\ \text{EMBED Equation.3}\ \square\square\square = B_n \\ \Delta^j u = \varphi_j \text{ на } S^{n-1}\end{cases} \qquad (1.1)$$

для любого $[x = (x]_1, x_2, \dots, x_n) \in R^n, B^n$ – единичный шар, S^{n-1} является единичной сферой в R^n, $\varphi_j \in L_p\left(S^{n-1}\right)$, $m \in N$, $0 \leq j < m$, $1 \leq p \leq \infty$.

§1 Задачи ДПФ с гельдеровыми граничными данными в шаре

Теорема 1.1.[6-8] Пусть $\varphi_j(y) \in C^{2m-j+\alpha}(\Omega_r).$ Тогда решение задачи ДПФ из класса $C^{\alpha}(\overline{\Omega_r})$ с гельдеровыми граничными данными имеет следующий вид:

$$u(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \int_{\partial\Omega_r} [\frac{\partial}{\partial n_y} \Delta_y^k G_{2m,n}(x,y) \cdot \varphi_{m-1-k}(y) - \Delta_y^k G_{2m,n}(x,y) \cdot \frac{\partial}{\partial n_y} \varphi_{m-1-k}(y)] dS_y \tag{1.2}$$

где А) функция Грина (в случае нечетного n, а также при четных n, если $2m < n$) представима в виде

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g_{2m,n}^0(x,y) - \sum_{k=1}^{m-1} g_{2m,n}^k(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n} \left| x - y \right|^{2m-n},$$

$$g_{2m,n}^0(x,y) = d_{2m,n} \left[\left| \frac{y}{r} \right| \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right| \right]^{2m-n},$$

$$g_{2m,n}^k(x,y) = d_{2m,n}(2m-n)(2(m-1)-n)...(2(m-k+1)-n) \cdot \left[\left| \frac{y}{r} \right| \cdot \left| x - \frac{y}{|y|^2} r^2 \right| \right]^{2(m-k)-n} \cdot$$

$$\cdot \left(1 - \left| \frac{y}{r} \right|^2 \right)^k \cdot \left(1 - \left| \frac{x}{r} \right|^2 \right)^k \frac{r^{2k}}{(-2)^k k!}, \qquad k = 1, ..., m-1,$$

причем

$$d_{2m,n} = \frac{1}{(2m-n)(2(m-1)-n)(2(m-2)-n)...(4-n)(2-n)} \cdot \frac{1}{(m-1)!} \cdot \frac{\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)}{2^m \pi^{\frac{n}{2}}},$$

$\Gamma(\cdot)$ – гамма функция.

Б) функция Грина (в случае четного n при $2m \geq n$) представима в виде

$$G_{2m,n}(x,y) = \varepsilon_{2m,n}(x,y) - g^0_{2m,n}(x,y) - \sum_{k=1}^{m-1} g^k_{2m,n}(x,y),$$

где

$$\varepsilon_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n} \,|\, x-y \,|^{2m-n} \cdot \ln|x-y|,$$

$$g^0_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left| x-y^* \right|\right]^{2m-n} \ln\left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left| x-y^* \right|\right],$$

$$g^k_{2m,n}(x,y) = d_{2m,n}\left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left| x-y^* \right|\right]^{2(m-k)-n} \cdot \left(1-\left|\frac{y}{r}\right|^2\right)^k \cdot \left(1-\left|\frac{x}{r}\right|^2\right)^k r^{2k} \times$$

$$\times\left[\frac{(-2)^k}{k!}(2m-n)(2(m-1)-n)\ldots(2(m-k+1)-n) \cdot \ln\left[\left|\frac{y}{r}\right| \cdot \left| x-y^* \right|\right] - \right.$$

$$\left. - \frac{2^{2k}}{2} \cdot \left(\frac{1}{k} + \sum_{j=1}^{k-1} \frac{1}{j} \frac{(-1)^{k-j}}{(k-j)!} \frac{(2m-n)}{2} \ldots \frac{(2m-n-2(k-j)+2)}{2}\right)\right], \ k = \overline{1, m-1},$$

причем

$$d_{2m,n} = \frac{(-1)^{\frac{n}{2}-1}}{\Gamma(m)\Gamma\left(m-\frac{n}{2}+1\right)2^{2m-1}\pi^{\frac{n}{2}}},$$

$y^* = \dfrac{y}{|y|^2} r^2$ - симметричная точка y относительно сферы S_r.

Таким образом, получено явное представление решения задачи Дирихле для полигармонических функций произвольного порядка в шаре с любым числом пространственных переменных с гельдеровыми граничными данными.

§2 Задачи ДПФ с L_p граничными данными в единичном шаре

Введем следующие определения

Определение 2.1. Пусть D односвязная (ограниченная или неограниченная) область в $\mathbb{R}^n$ с гладкой границей ∂D и $k \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$, $C^k(D)$ обозначает множество всех функций, имеющих непрерывные частные производные до порядка k в D. Если f является непрерывной функцией, определенная на $D \times \partial D$ и удовлетворяет $f(\cdot, v) \in C^k(D)$ для любого фиксированного $v \in \partial D$ и $f(x,\cdot) \in C(\partial D)$ для любого фиксированного $x \in D$, то говорят, что f гладкости $C^k \times C$ в $D \times \partial D$ и пишут, что $f \in (C^k \times C)(D \times \partial D)$.

Определение 2.2. Последовательность вещественных функций $\{g_m(x,v)\}_{m=1}^{\infty}$, определенных на $B_n \times S^{n-1}$ называется последовательностью высокого порядка ядра Пуассона, или, точнее, $g_m(x,v)$ является m -го порядка ядра Пуассона, если она удовлетворяет следующим условиям:

Для любого $m \in \mathbb{N}, g_m \in (C^\infty \times C)(B_n \times S^{n-1}), \dfrac{\partial g_m}{\partial x_j}$ и $\dfrac{\partial^2 g_m}{\partial x_j^2}$ принадлежат в $C(B_n \times S^{n-1}), 1 \le j \le n$; некасательные краевые $\lim\limits_{x\to u,\, x\in B_n, u\in S^{n-1}} g_m(x,v) = g_m(u,v)$ существует для всех v, но у $v \neq u$, где u есть любой фиксированный единичный вектор, относительно к S^{n-1}. Кроме того, $g_m(u,\cdot)$ можно непрерывно продолжить на $\{B_1 n\ \}\{u\}$ вплоть для всех $u \in S^{n-1}$;

$\Delta g_1(x,v) = 0$ и $\Delta g_m(x,v) = g_{m-1}(x,v)$ при $m > 1$;

$\lim\limits_{x\to u,\, x\in B_n, u\in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} g_1(x,v)\gamma(v)dv = \gamma(u)$ п.в. для любой $\gamma \in L^p(S^{n-1})$, $p \ge 1$;

$\lim\limits_{x\to u,\, x\in B_n, u\in S^{n-1}} \int_{S^{n-1}} g_m(x,v)\gamma(v)dv = 0$ для любого $2 \le m \le n-1$ и $\gamma \in L^p(S^{n-1}), p \ge 1$

$\lim\limits_{x\to u,\, x\in B_n, u\in S^{n-1}} g_m(x,v) = 0$ равномерно на $v \in S^{n-1}$ для любого фиксировано $u \in S^{n-1}, m \ge n$.

Высокий порядок ядра Пуассона является ключевым в нашем подходе к решению задачи ДПФ (1.1). Используем их явные выражения степенных рядов $|x|$ с коэффициентами в терминах ультрасферических (или Гегенбауэра) полиномов $P_l^{(\lambda)}$. Последний может быть определен через производящие функции [10]. Пусть

$$(1-2r\xi+r^2)^{-\lambda}=\sum_{l=0}^{\infty}P_l^{(\lambda)}(\xi)r^l \quad , \qquad (2.1)$$

где $0\le|r|<1, |\xi|\le 1$ и $\lambda>-\frac{1}{2}$, то $P_l^{(\lambda)}$ называется ультрасферическим многочленов степени l, связанных с λ. $P_l^{(\lambda)}$ многочлен точной степени l, и имеет следующее явное выражение (см. [10]):

$$P_l^{(\lambda)}(\xi)=\sum_{j=0}^{\left[\frac{l}{2}\right]}(-1)^j\frac{\Gamma(l-j+\lambda)}{\Gamma(\lambda)j!\,(l-2j)!}(2\xi)^{l-2j}. \qquad (2.2)$$

Введем сферические координаты

(2.3)

и последовательность

$$u=(\cos\theta_1,\sin\theta_1\cos\theta_2,\dots,\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{n-2}\sin\theta_{n-1}) , \qquad (2.4)$$

то полярные координаты

$$x=ru \quad , \qquad (2.5)$$

где $r=(x_1^2+x_2^2+\dots+x_n^2)^{1/2}$, $0\le\theta_1,\theta_2,\dots,\theta_{n-2}\le\pi$ и $0\le\theta_{n-1}\le 2\pi$. Непосредственным вычислением, полярная форма координат Лапласиана имеет вид

$$\Delta=\frac{1}{\rho^{n-1}}\frac{\partial}{\partial\rho}\left(\rho^{n-1}\frac{\partial}{\partial\rho}\right)+\frac{1}{\rho^2}\Delta_{S^{n-1}}, \qquad (2.6)$$

где оператор Лапласа-Бельтрами

$$+(n-4)\frac{\cot\theta_3}{\sin^2\theta_1\sin^2\theta_2}\frac{\partial}{\partial\theta_3}+\dots+\frac{\cot\theta_{n-2}}{\sin^2\theta_1\cdots\sin^2\theta_{n-3}}\frac{\partial}{\partial\theta_{n-2}}. \qquad (2.7)$$

Рассмотрим частное дифференциальное уравнение на единичной сфере,

$$\Delta_{S^{n-1}}\Phi=\lambda\Phi \quad , \qquad (2.8)$$

где Φ есть функция, определенная на единичной сфере, λ является константой. Если приведенные выше уравнения в частных производных имеют ненулевое решение для некоторых λ , то λ , называется собственным значением оператора $\Delta_{S^{n-1}}$ и ненулевые решения Φ называются собственными функциями, соответствующими λ .

Имеет место следующая лемма

Лемма 2.1 ([11]). Все собственные значения оператора Лапласа-Бельтрами $\Delta_{S^{n-1}}$ из (2.7) имеют вид

$$\lambda_l = -l(l+n-2) \qquad (2.9)$$

где $l = 0, 1, 2 \dots$. Собственные функции, соответствующие λ_l являются $P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(u, v)$ при $u \in S^{n-1}$ для всех фиксированных $v \in S^{n-1}$, где $u \cdot v = \sum_{k=1}^{n} u_k v_k$ является евклидовым скалярным произведением единичных векторов $u = (u_1, u_2, \dots, u_n)$ и $v = (v_1, v_2, \dots, v_n)$ в S^{n-1}.

Замечание 2.1. Если мы определим

$$Z_v^{(l)}(u) = \frac{1}{2\pi^{\frac{n}{2}}}\left(l + \frac{n}{2} - 1\right)\Gamma\left(\frac{n}{2} - 1\right)P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(u \cdot v) \qquad (2.10)$$

Такая функция $Z_v^{(l)}$ называется зональной гармоникой степени l полюса v .

Имеет место оценка

$$\left|P^{(l)}(u \cdot v)\right| \leq \left|P^{(l)}(v \cdot v)\right| = \frac{n-2}{2l+n-2} a_l \qquad (2.11)$$

для всех $u, v \in S^{n-1}$.

Лемма 2.2.

$$\left[\Delta(r^s P\right]_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(u \cdot v)\Big) = (\lambda_l - \lambda_s) r^{s-2} P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}(u \cdot v) \qquad (2.12)$$

для всех ненулевых $s \in \mathbb{R}^n$ и $l \in \mathbb{N}$

Лемма 2.3. Для всех $x \in \mathbb{R}^n$ и фиксированных $s \in S^{n-1}$, пусть

$$\left[(H]_{v}^{(l)}\right)_1(x) = |x|^l P_l^{\left(\frac{n}{2}-1\right)}\left(\frac{x}{|x|}\cdot v\right), \quad (2.13)$$

$$\left[(H]_{v}^{(l)}\right)_2(x) = c_2^{(l)}(|x|^2-1)\left[(H]_{v}^{(l)}\right)_1(x) \qquad (2.14)$$

и

$$\left[(H]_{v}^{(l)}\right)_m(x) = \left(H_v^{(l)}\right)_1(x)\left[\left(c_m^{(l)}\right)^T X_m\right], \quad (2.15)$$

где $m = 3,4,\dots, l = 0,1,2,\dots,$ и λ_l определяются формулой (2.9) и являются собственными значениями оператора Лапласа-Бельтрами $\Delta_{S^{n-1}}$ и выражается (2.7). Тогда

$$\left[\Delta(H]_{v}^{(l)}\right)_1(x) \equiv 0 \qquad (2.16)$$

и

$$\left[\Delta(H]_{v}^{(l)}\right)_m = \left[(H]_{v}^{(l)}\right)_{m-1}, m \geq 2 \quad . \qquad (2.17)$$

Теорема 2.1. Пусть

$$g_m(x,v) = \frac{1}{\omega_{n-1}}\sum_{l=0}^{\infty}\frac{2l+n-2}{n-2}\left(H_v^{(l)}\right)_m(x) \qquad (2.18)$$

где $m \in N^+,\ x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_n, v \in S^{n-1},$ и $\left[(H]_{v}^{(l)}\right)_m(x)$ из леммы 2.3. Тогда $\{g]_m[(x,v)\}_{m=1}^{\infty}$ является последовательностью высокого порядка ядра Пуассона как в определении 2.2.

Имеет место следующая лемма

Лемма 2.4. Пусть D односвязная ограниченная область в $\mathbf{R}^n$ с гладкой границей ∂D .

Если $f \in (C^1 \times C)(D \times \partial D)$ и $\frac{\partial f}{\partial x_j} \in C(D \times \partial D), \quad 1 \leq j \leq n$, то

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\int_{\partial D} f(x,v)dv\right) = \int_{\partial D}\frac{\partial f}{(dx_j)(x,v)dv} \qquad (2.19)$$

для всех $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in B_n, v \in S^{n-1},$ и $1 \leq j \leq n.$

Теорема 2.2. Пусть $\{g_m(z,t)\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность высокого порядка ядра Пуассона, определенная в теореме 2.1, тогда для любых $m > 1$ и $\gamma \in L^p(T), \quad p \geq 1$

$$\Delta\left(\int_{S^{n-1}} g_m(x,v)\gamma(v)dv\right) = \int_{S^{n-1}} g_{m-1}(x,v)\gamma(v)dv \quad (2.20)$$

Теорема 2.3. Пусть $\{g_m(z,t)\}_{m=1}^{\infty}$ последовательность высокого порядка ядра Пуассона на $B_n \times S^{n-1}$, определенная по формуле (2.18), тогда для любого $m > 1$, задача ДПФ (1.1) разрешима и ее общее решение имеет вид

$$u(x) = \sum_{j=1}^{m} \int_{S^{n-1}} g_j(x,v) f_{j-1}(v)dv + u_h(x), \qquad x \in B_n \quad (2.21)$$

где $u_h(x)$ обозначает общее решение однородной задачи ДПФ

$$\begin{cases} \Delta^m u = 0 \text{ в } B_n, \\ \Delta^j u = 0 \text{ на } S^{n-1} \end{cases} \quad (2.22)$$

где $1 \le j \le m-1$.

Литература

Векуа И.Н. Обобщенные аналитические функций. – М.: Наука, 1956. – 608 с.

Соболев С.Л. Введение в теорию кубатурных формул. – М.: Наука, 1974. – 808 с.

H. Begehr, J. Du, Y. Wang, A Dirichlet problem for polyharmonic functions, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 187 (2008), 435-457.

H. Begehr, Z. Du, N. Wang, Dirichlet problems for inhomogeneous complex mixed-partial differential equations of higher order in the unit disc: New view, Oper. Theory Adv. Appl. 205 (2009), 101-128.

H. Begehr and E. Gaertner, A Dirichlet problem for the inhomogeneneous polyharmonic equations in the upper half plane, Georgian Math. J. 14 (2007), 33-52.

Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д., Немченко М.Ю. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре. Доклады Российской Академии Наук, 2008, Т.421, №3, 305-307 с.

Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. – 2008. – Vol. 53, №2. – P. 177-183.

Кальменов Т.Ш., Кошанов Б.Д. Представление функции Грина задачи Дирихле для полигармонических уравнений в шаре // Сибирский математический журнал. – 2008. – Т.49, №3. – С. 423-428.

L. K. Hua, Harmonic analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Translations of Mathematical Monographs Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1963.

E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, PrincetonUniversity Press, Princeton, New Jersey, 1971.

G. Szego, Orthogonal Polynomials, AMS Colloquium Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1975.

REFERENCES

1 Vekua I.N. Obobshhennye analiticheskie funkcij. – M.: Nauka, 1956. – 608 s.

2 Sobolev S.L. Vvedenie v teoriju kubaturnyh formul. – M.: Nauka, 1974. – 808 s.

3 H. Begehr, J. Du, Y. Wang, A Dirichlet problem for polyharmonic functions, Ann. Mat. Pura Appl. (4) 187 (2008). – P. 435-457.

4 H. Begehr, Z. Du, N. Wang, Dirichlet problems for inhomogeneous complex mixed-partial differential equations of higher order in the unit disc: New view, Oper. Theory Adv. Appl. 205 (2009), 101-128.

5 H. Begehr and E. Gaertner, A Dirichlet problem for the inhomogeneneous polyharmonic equations in the upper half plane, Georgian Math. J. 14 (2007), 33-52.

6 Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Ju. Predstavlenie funkcii Grina zadachi Dirihle dlja poligarmonicheskih uravnenij v share. Doklady Rossijskoj Akademii Nauk, 2008, T.421, №3, 305-307 s.

7 Kalmenov T.Sh., Koshanov B.D., Nemchenko M.Y. Green function representation for the Dirichlet problem of the polyharmonic equation in a sphere // Complex variables and Elliptic equations. – 2008. – Vol. 53, №2. – P. 177-183.

8 Kal'menov T.Sh., Koshanov B.D. Predstavlenie funkcii Grina zadachi Dirihle dlja poligarmonicheskih uravnenij v share // Sibirskij matematicheskij zhurnal. – 2008. – T.49, №3. – S. 423-428.

9 L. K. Hua, Harmonic analysis of Functions of Several Complex Variables in the Classical Domains, Translations of Mathematical Monographs Vol. 6, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1963.

10 E. M. Stein, G. Weiss, Introduction to Fourier Analysis on Euclidean Spaces, PrincetonUniversity Press, Princeton, New Jersey, 1971.

11 G. Szego, Orthogonal Polynomials, AMS Colloquium Vol. 23, Amer. Math. Soc., Providence R. I., 1975.

Работа выполнена при поддержке гранта 0749/ГФ МОН РК.

Резюме

Б.Д. Қошанов, М.Д. Қошанова

полигармониялық функциялар үшін бірлік шарда Гельдер және Lp шекаралық шарттары бар Дирихле есебінің кластары

Бұл мақалада полигармониялық функциялар үшін бірлік шарда Гельдер және Lp шекаралық шарттары бар Дирихле есебінің кластары қарастырылды. Осы есептің екі жағдай үшін де шешімдерінің интегралдық түрдегі өрнегі алынды.

Кілт сөздер: класс, мақсаттар, функциялар, шар, шешімдер, интеграл.

Summary

B. D. Koshanov, M. D. Koshanova

we consider a class of Dirichlet problems with Holder

and Lp boundary data for polyharmonic functions

In this article, we consider a class of Dirichlet problems with Holder and Lp boundary data for polyharmonic functions in the unit ball. We give the integral representation solutions of the problems in this cases.

Keywords: class, tasks, functions, ball, decisions, integral.

Поступила 10.07.2013 г.